

椭圆声学超材料模型构建与带隙分析

徐文帅, 蒙 丹, 陈 猛, 姜 恒, 王育人, 刘 宇, 刘瑞霞

(中国科学院力学研究所微重力实验室, 北京 100190)

摘 要: 通过在一个元胞内引入多个椭圆散射体可以构成多振子椭圆声学超材料, 本文研究了椭圆散射体不同排列方式下振子间的耦合作用, 以及这种耦合作用对能带结构的影响, 并通过对振动模态的研究阐明了带隙产生的物理机制。研究表明, 当散射体为椭圆时, 相同散射体不同的排列方式对应不同的能带结构, 带隙结构与椭圆散射体的数量以及散射体之间的耦合相关, 随着散射体数量增加带隙结构将趋于一致。

关键词: 声学超材料; 椭圆散射体; 振动模态; 能带结构

中图分类号: O422,U668

文献标识码: A

Model Construction and Band Gap Analysis of Elliptical Sonic Metamaterial

Xu Wenshuai, Meng Dan, Chen Meng, Jiang Heng, Wang Yuren, Liu Yu, Liu Ruixia

(Key Laboratory of Microgravity, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, china)

Abstract: By placing multiple elliptical scatterers in an unit cell, multi-oscillators sonic metamaterials are constituted. The coupling effect of different scatterers arrangements is investigated; and its influence on the band gap properties of sonic metamaterials is revealed. With the investigation of vibration modes, the physical mechanism of band gap generation is discussed. The results show that the same scatterers with different arrangements can develop different band structure; the generation of band gap is closely related with the number of scatterers and the coupling effect between the multi-oscillators. As the number of scatterers increases, the band gap structure tends to be consistent.

Key words: Sonic metamaterials; elliptical scatterer; vibration mode; band structure

0 引 言

声学超材料是具有天然材料所不具备的超常声学属性的人工复合材料^[1], 如负质量密度、负模量等^[2,3], 它可以打破质量密度定律, 具有低频带隙特性, 能够以较小尺寸实现对长波长声波的有效控制, 可用于实现对水下噪声的特定控制以及特殊功能水下声学器件的设计, 对实现声波/弹性波的控制、船用新型减振降噪材料开发以及特殊声学装置的设计等方面有着深远意义, 在军用和民用领域具有重要的应用价值。然而, 研究发现, 单负声学超材料频带窄^[4], 调控因素少, 而双负声学超材料^[5,6]结构复杂, 实现相对困难。关于如何拓宽带隙的问题的研究还较少^[7], 带隙宽度过窄成为制约声学超材料应用的关键问题^[8]。

通过调控组分材料弹性常数匹配和局域共振单元几何形状可以拓宽局域共振带隙, 但这种调控

大多基于改变局域共振单元的本征属性，对带隙的扩展效果并不明显^[9-10]。研究人员在对赫姆霍兹型超材料、声学超表面、柱形超材料及缺陷态等超材料的研究中发现^[11-14]，基元内部的耦合作用有利于宽频带隙及声学超常特性的实现。此外，对元胞结构进行设计，可以实现对声学超材料超常声学特性的控制。Sheng 等人^[15]在对局域共振结构声学超常特性的研究中，证实了局域共振声学超材料的声学特性不依赖于严格的周期结构和对称性，但该结论是基于对散射体为圆柱（二维）或球形（三维）的传统声学超材料的研究得到的。当散射体的形状不是圆柱或球形，而是椭圆时，单个散射体的对称性被打破，在不同的方向会有不同的共振特性，散射体之间也会出现耦合效应，这时散射体的排列方式可能会影响带隙的宽度，进而影响声学超材料的超常声学特性。

我们将椭圆散射体引入声学超材料中，研究椭圆散射体不同排列方式下椭圆声学超材料振子间的耦合作用，以及在多振子结构中，振子间耦合作用对能带结构的影响，并给出振子变化时带隙的变化规律。

1 椭圆声学超材料模型构建

多振子声学超材料通常结构复杂、调控自由度多，同时其超常声学属性的形成机制较为复杂，难以进行系统研究。通过模型简化和对比研究，我们设计了一种结构相对简单的新型椭圆声学超材料模型，它是通过在结构单元中引入一系列椭圆散射体，并进行不同排列组合构成的，其单胞结构示意图如图 1 所示。

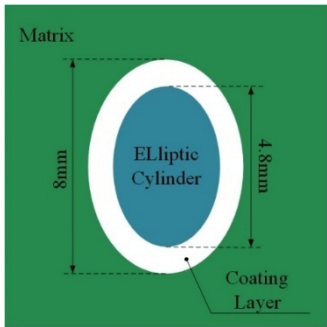


图 1 椭圆散射体结构单胞示意图

Fig.1 Structure of an unit cell of elliptical scatterer

该结构由基体、包覆软层、中心柱体构成，其中，中心椭圆柱体为钢质材料，钢柱的短轴为 4.8mm，长轴为 6.4mm，包覆层为软的硅橡胶，整个散射体的短轴为 6mm，长轴为 8mm，基体为环氧树脂。其中，钢、硅橡胶及基体的材料参数如表 1 所示。

表 1 材料的质量密度和弹性常数

Table 1 Mass density and elastic constant of materials

材料	环氧树脂	硅橡胶	钢
质量密度 ρ (kg/m ³)	1180	1300	7780
杨氏模量 E (Pa)	0.435×10^{10}	1.175×10^5	21.06×10^{10}
剪切模量 μ (N/m ²)	0.159×10^{10}	4×10^4	8.1×10^{10}

集中质量法是振动力学等领域常用的离散化方法，Wang 等^[16,17]将集中质量法引入到二维、三维

声子晶体带隙计算中。本文利用集中质量法对椭圆声学超材料的能带结构、振动模态开展研究^[16]，同时借鉴有限元法离散单元刚度矩阵的计算方法，引入周期边界条件，结合 Bloch 定理研究二维声学超材料。对于二维声学超材料，其位移可以拆分为 x, y 平面内和平面外，本文仅考虑平面内波动情况。根据等效介质理论，在长波假设下，可以把声学超材料看作具有特殊性质的均一材料，利用等效介质参数对其动力学行为进行描述，以此判断声波在其中的传播情况。在求解具有局域共振带隙的声子晶体时，与其他方法（如平面波展开法、传递矩阵法、时域有限差分法等）相比，集中质量法具有收敛性好、计算精度高等特点，同时对能带结构的描述更为完整。

2 振动模态与能带结构分析

为了研究椭圆声学超材料散射体排列方式对带隙特性的影响，我们在一个元胞中引入不同数目的散射体并以不同的方式排列，使用 COMSOL Multiphysics 计算软件分别对能带结构进行了计算，根据散射体数目分别将它们称为单振子、双振子、三振子、四振子及六振子椭圆声学超材料，元胞结构示意图如图 2 所示。

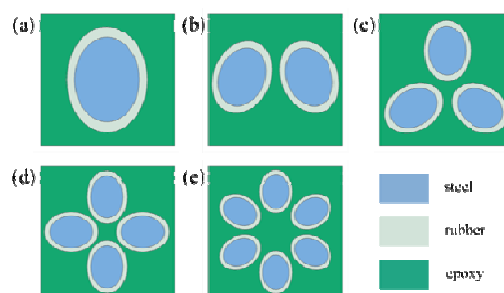


图 2 椭圆散射体元胞结构:(a)~(e)分别为单振子、双振子、三振子、四振子及六振子结构

Fig 2. Cellular structure of elliptical scatterer: (a) ~ (e) are single-oscillator, dual-oscillator, triple-oscillator, quadruple-oscillator and six-oscillator structure, respectively

为消除填充率的影响，在设计时令它们具有相同的填充率，均为 37.7%，这使得各个椭圆声学超材料的晶格常数各不相同，其中单振子、双振子、三振子、四振子、六振子椭圆声学超材料晶格常数依次为 10mm，14.1mm，17.3mm，20mm，24.5mm。

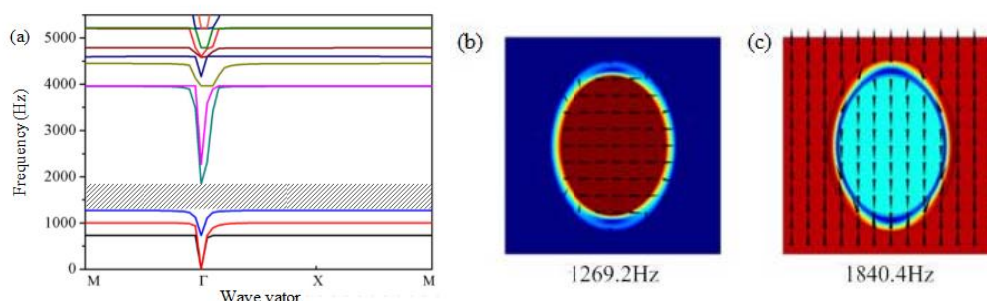


图 3 (a)单振子椭圆声学超材料能带结构；(b)其第一带隙下截止频率对应的振动模态；(c)第一带隙上截止频率对应的振动模态

Fig 3. (a) Band structure of single-oscillator elliptical acoustic metamaterial; Vibration modes at lower edge (b) and upper edge (c) of the first band gap.

图 3(a)为椭圆单振子声学超材料的能带结构。可以发现，当元胞只含有一个散射体时仅产生一个带隙，频率范围为 1269.2Hz-1840.4Hz。图 3(b)(c)分别给出了该带隙下截止频率与上截止频率处对应的振动模式，其中在下截止频率处为钢柱沿短轴振动而基体基本不动，软层如弹簧一样链接着基体与钢柱；上截止频率处为钢柱与基体沿长轴方向相对振动，软层如弹簧一样链接着二者。从图 3(a)中可以看出，单振子椭圆声学超材料的能带结构中出现了类 Fano 干涉现象^[18]，这会导致局域共振带隙内波的衰减较小，限制了带隙的宽度。

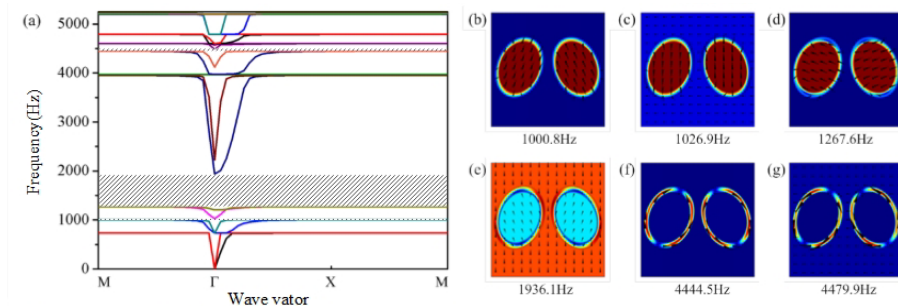


图 4(a)双振子椭圆声学超材料能带结构；(b)-(g)分别为为第一带隙至第三带隙下、上截止频率处的振动模式

Fig 4. (a) Band structure of dual-oscillator acoustic metamaterial; (b)-(g) are vibration modes at the lower edge and upper edge from the first band gap to the third band gap

图 4(a)给出了椭圆双振子声学超材料的能带结构，可以看出该结构在三个频率范围内形成带隙，分别位于 1000.8Hz~1026.9Hz、1267.6Hz~1936.1Hz 与 4444.5Hz~4479.9Hz。与椭圆单振子声学超材料相比，它的第一带隙位于更低的频段，并且在高频也具有一个狭窄的带隙。图 4(b)-(g)给出了双振子声学超材料各带隙边界相对应的振动模式，由图 4(b)第一带隙下截止频率的振动模式可以看出，散射体沿长轴振动，而基体基本不动，而在第一带隙上截止频率处（图 4c），散射体与基体都参与了振动。图 4(d)为第二带隙下边界对应的振动模式，两振子都沿短轴运动，基体基本不动，而第二带隙上边界对应的振动模式(图 4e)，散射体与基体都参与了振动。图 4(f)为第三带隙下边界的振动模式，软层振动而基体与钢柱基本不动。图 4(g)为第三带隙上边界的振动模式，软层与基体产生相对振动，而钢柱基本不动。与单振子椭圆声学超材料比较发现它们存在一个共同点，即不管是单振子还是双振子声学超材料，在 1267Hz 附近散射体沿短轴振动都能诱发带隙。而二者之间的差异也很明显：(1)对于双振子系统而言，在 1000.8Hz 频率处由于散射体沿长轴的振动诱发了带隙，而单振子声学超材料在低频不存在带隙。实际上单振子声学超材料也存在沿长轴振动的振动模式，但是并未诱发带隙；(2)双振子椭圆声学超材料软层的振动诱发了第三带隙，而单振子同样存在这样的振动模式但是并没有诱发带隙。单振子的振动模式具有对称性，而由双振子的振动模式可以发现，其单个散射体产生的振动不对称，二者之间产生了明显耦合。

图 5 给出了三振子椭圆声学超材料的能带结构，它在四个频率范围内形成带隙，比双振子椭圆声学超材料多一条带隙，且带隙的频率范围也有差别。与双振子椭圆声学超材料相比，可以发现：

(1) 在 1001Hz 附近，对于双振子及三振子椭圆声学超材料，钢柱沿长轴振动都诱发了第一带隙，但后者的第一带隙比前者拓宽了 72.5Hz；(2) 在 1268Hz 附近，对于双振子及三振子椭圆声学超材

料, 钢柱沿短轴振动都诱发了第二带隙, 但后者比前者带隙宽度扩宽了 160.5Hz; (3) 三振子系统中软层沿短轴振动在 3948.9Hz 诱发了第三带隙, 而双振子系统虽然也存在软层沿短轴振动的振动模式, 但并未诱发带隙; (4) 在 4445Hz 附近, 双振子及三振子声学超材料都因软层沿长轴振动诱发了带隙, 而后者比前者拓宽了 51.7Hz。

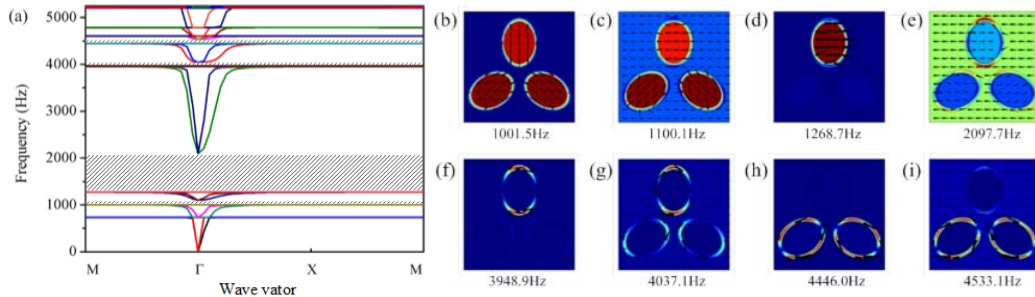


图 5(a)三振子椭圆声学超材料能带结构, (b)-(i)分别为为第一带隙至第四带隙下、上截止频率处的振动模式

Fig5. (a) Band structure of triple-oscillator acoustic metamaterial; (b)-(i) are vibration modes at the lower edge and upper edge from the first band gap to the fourth band gap

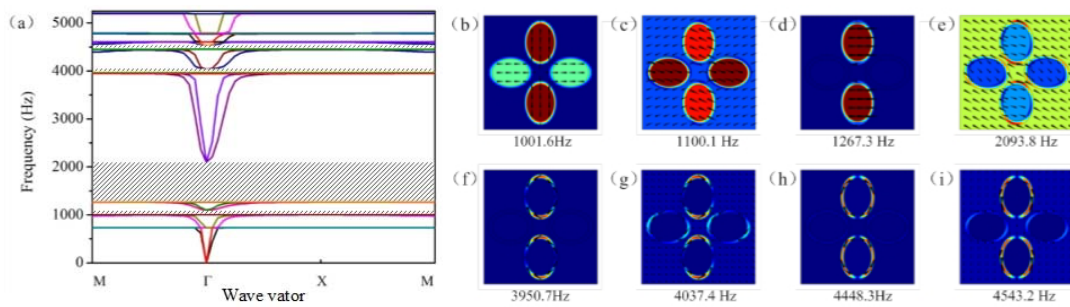


图 6(a)四振子椭圆声学超材料能带结构, (b)-(i)分别为为第一带隙至第四带隙下、上截止频率处的振动模式

Fig6. (a) Band structure of quadruple-oscillator acoustic metamaterial; (b)-(i) are vibration modes at the lower edge and upper edge from the first band gap to the fourth band gap

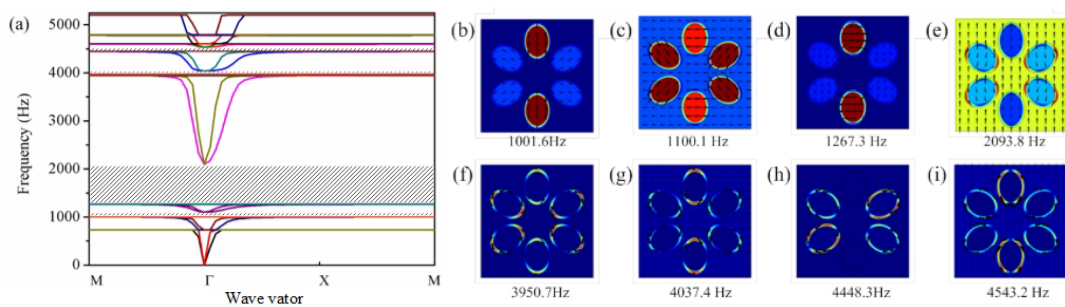


图 7(a)六振子椭圆声学超材料能带结构, (b)-(i)分别为为第一带隙至第四带隙下、上截止频率处的振动模式

Fig7. (a) Band structure of six-oscillator acoustic metamaterial; (b)-(i) are vibration modes at the lower edge and upper edge from the first band gap to the fourth band gap

图 6 和图 7 分别为四振子和六振子结构的带隙特征和振动模态，二者均在四个频率范围内形成带隙，并且带隙的位置基本一致。从能带结构看带隙所处的频率单位与三振子椭圆声学超材料基本一致。从振动模态来看，三者的振动模态相似。从三振子之后，随着散射体数量的增加，振动模态和带隙结构逐渐变得一致，散射体之间的耦合作用趋于相同。

从上述单振子、双振子、三振子、四振子及六振子椭圆声学超材料带隙和振动模态的对比中，可以发现，带隙结构的不同与散射体的振动模态息息相关。单个单振子在振动时包括钢柱、软层和基体三者之间关联的振动关系，而多个振子在振动时除了单个振子的振动外，还包括振子之间复杂的耦合关系，能带结构更加复杂。单振子结构存在一个带隙，而双振子结构在三个频率范围内形成带隙，三振子系统的能带结构在四个频率范围内形成带隙，比双振子椭圆声学超材料多一条带隙，且带隙的频率范围也有差别，四振子、六振子结构与三振子结构相似，在四个频率内形成带隙。椭圆声学超材料能否诱发带隙与散射体的排列方式息息相关，诱导带隙产生的振动模态有四种，第一是散射体沿长轴振动基体不动；第二是散射体沿短轴振动基体不动；第三是散射体软层沿短轴振动，基体与钢柱不动；第四是散射体软层沿长轴振动，基体与钢柱不动。

3 结 论

本文通过在一个元胞内引入多个椭圆散射体构成多振子椭圆声学超材料，研究了不同排列方式下的带隙特性及随振子数目增加能带结构的变化规律，并通过对振动模态的研究阐明了带隙产生的物理机制。对他们声学特性的研究主要得出以下结论：椭圆振子数在一定范围内的增加会使得带隙数量增多，带隙总频率范围扩宽；对振动模态的分析可以看出，多振子系统中振子之间呈现相对运动，产生了弱耦合作用，这也是带隙数目更加丰富的原因之一；通过对能带结构的对比发现，三振子、四振子和六振子之间的差别不如单振子、双振子和三振子之间的差别明显。

本文所用的多振子系统是研究多振子结构超常声学属性的理想结构，通过人为地调节椭圆散射体的排列方式，可以达到的特定的超常声学属性，为研究声学超材料的物理作用机制提供了理论上的参考。对于椭圆声学超材料基元结构的研究，也可以为水下声学超材料的设计和使用提供理论基础。

参 考 文 献

- [1] Lu M H, Feng L, Chen Y F. Phononic crystals and acoustic metamaterials[J]. Materials Today, 2009, 12(12): 34-42.
- [2] Yang Z, Mei J, Yang M, et al. Membrane-type acoustic metamaterial with negative dynamic mass[J]. Physical review letters, 2008, 101(20): 204301.
- [3] Fang N, Xi D, Xu J, et al. Ultrasonic metamaterials with negative modulus[J]. Nature materials, 2006, 5(6): 452-456.
- [4] Lee S H, Park C M, Seo Y M, et al. Acoustic metamaterial with negative density[J]. Physics letters A, 2009, 373(48): 4464-4469.
- [5] Li J, Chan C T. Double-negative acoustic metamaterial[J]. Physical Review E, 2004, 70(5): 055602.
- [6] Cheng Y, Xu J Y, Liu X J. One-dimensional structured ultrasonic metamaterials with simultaneously negative dynamic density and modulus[J]. Physical Review B, 2008, 77(4): 045134.

- [7] Assouar M B, Oudich M. Enlargement of a locally resonant sonic band gap by using double-sides stubbed phononic plates[J]. *Applied Physics Letters*, 2012, 100, 123506.
- [8] Zhang X, Liu Y Y, Wu F G, et al. Large two-dimensional band gaps in three-component phononic crystals[J]. *Physics Letters A*, 2003, 317 (1-2) :144-149
- [9] Kee C S, Kim J E, Park H Y, et al. Essential role of impedance in the formation of acoustic band gaps[J]. *Journal of Applied Physics*, 2000, 87 (4) :1593-1596
- [10] Lazarov B S, Jensen J S. Low-frequency band gaps in chains with attached non-linear oscillators[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, 42 1186–1193.
- [11] Gu Y W, Luo X D, Ma H R. Low frequency elastic wave propagation in two dimensional locally resonant phononic crystal with asymmetric resonator[J].*Journal of Applied Physics*, 2009, 105(4):1734.
- [12] Chen M, Meng D, Zhang H, et al. Resonance-coupling effect on broad band gap formation in locally resonant sonic metamaterials[J]. *Wave Motion*, 2016, 63: 111–119.
- [13] Lemoult F, Kaina N, Fink M, et al. Wave propagation control at the deep subwavelength scale in metamaterials[J]. *Nature Physics*, 2013, 9(1): 55-60.
- [14] Xiao Y, Mace B R, Wen J, et al. Formation and coupling of band gaps in a locally resonant elastic system comprising a string with attached resonators[J]. *Physics Letters A*, 2011, 375(12): 1485-1491.
- [15] P. Sheng, X. Zhang, Z. Liu, et al, Locally resonant sonic materials[J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2003, 338(1): 201-205.
- [16] Wang G, Wen J H, Liu Y Z, et al. Lumped-mass method for the study of band structure in two-dimensional phononic crystals[J]. *Physical review B*, 2004, 69(18): 184302
- [17] Wang G, Wen X S, Wen J H, et al. Two-dimensional locally resonant phononic crystals with binary structures[J]. *Physical review letters*, 2004, 93(15): 154302.
- [18] Goffaux C, Sánchez-Dehesa J, Yeyati A L, et al. Evidence of fano-like interference phenomena in locally resonant materials[J]. *Physical review letters*, 2002, 88(22): 225502.